Особенности роста парового пузырька при лазерном воздействии на биологическую жидкость

А.А. Чернов[1,2], А.А. Пильник[1,2], А.А. Левин[1,3], М.А, Гузев[4], В.М. Чудновский[1,4]

[1]Новосибирский государственный университет
[2]Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
[3]Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск
[4]Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

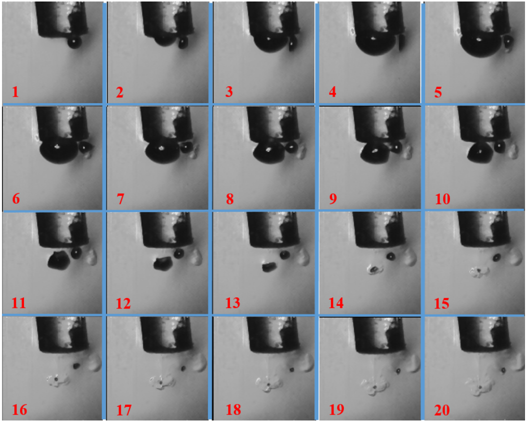
При поддержке РНФ, проект № 19-19-00122

Научная конференция «Математика в медицине»
27–30 мая 2021 года, Томск

Outline

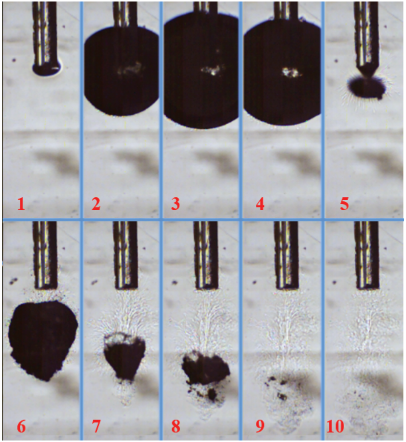
- Экспериментальные данные по элементарному акту вскипания недогретой жидкости вблизи торца оптоволокна при поверхностном и объемном тепловыделении.
- Оценка температуры и размера области перегрева жидкости вблизи торца оптоволокна, характерного времени ожидания образования парового пузырька.
- Механизм и оценка скорости формирующейся при схлопывании парового пузырька горячей затопленной струи.
- Численное подтверждение гипотезы о куммулятивной природе формирующейся струи.
- Математическая модель роста парового пузырька в перегретой жидкости. Характерные величины и определяющие критерии.
- Аналитическое решение. Инерционная и переходная стадии роста. Тепловая стадия роста: автомодельное решение.
- Выводы.

Вскипание при поверхностном тепловыделении.

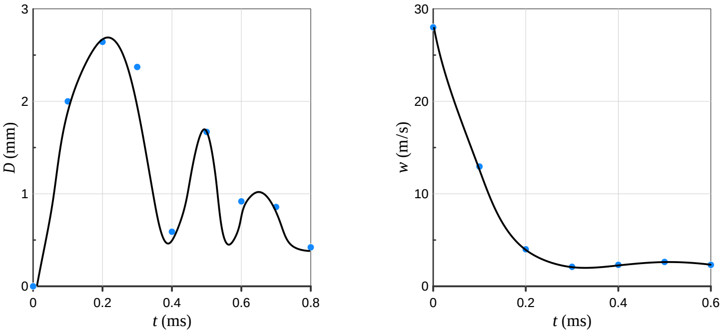


Эволюция парогазового пузырька, образованного на зачерненном торце оптоволокна, при воздействии лазерного излучения с длиной волны 0.97 μm.

Интервал между кадрами — 1/30 ms.

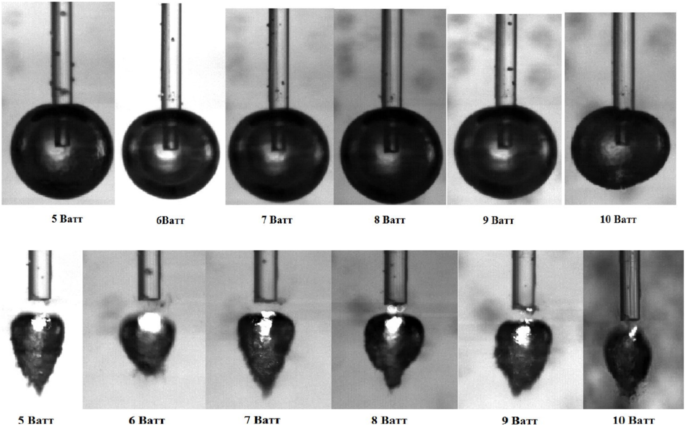


Эволюция парогазового пузырька, образованного вблизи торца оптоволокна, при воздействии лазерного излучения с длиной волны 1.94 μm в случае вертикальной ориентации оптоволокна. Интервал между кадрами — 0.1 ms.



Зависимость приведенного диаметра парогазового пузырька D (a) и скорости формирующейся струи w (b) от времени t.

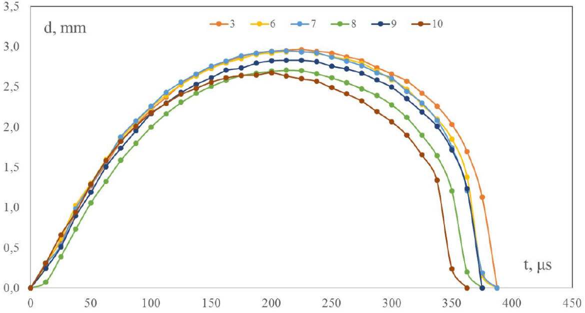
Зависимость от мощности.



(а) Максимальный размер пузырей, получаемых в экспериментах при различных мощностях подаваемого лазерного излучения.

(б) Иллюстрация схожего характера образующихся при различных мощностях подаваемого лазерного излучения кумулятивных струй.

Динамика пузырька.



Динамика парового пузырька при различных мощностях лазерного излучения.

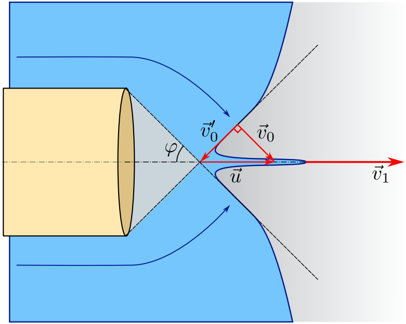
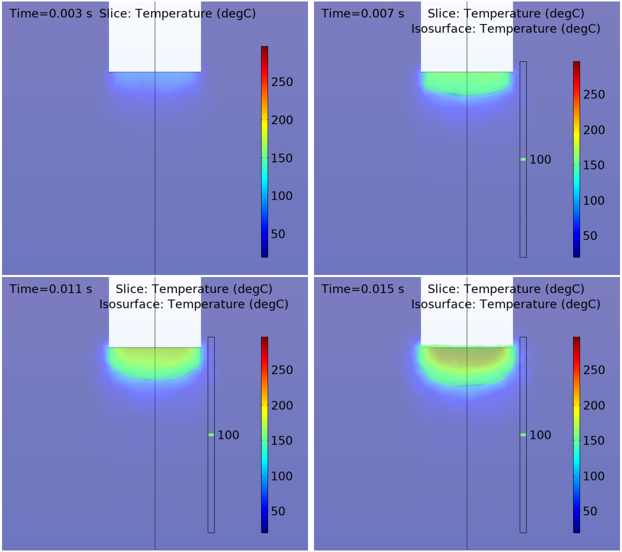


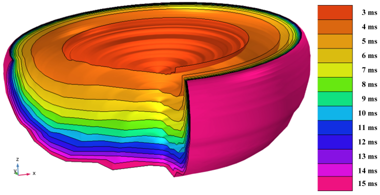
Схема формирования кумулятивной струи.

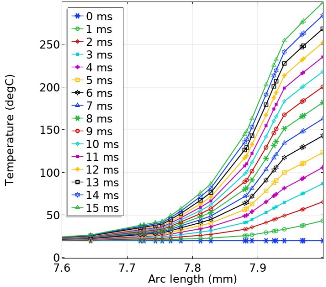
$$\begin{cases} u = v_0 / \sin\varphi \\ v_0' = v_0 \coth\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_1 = v_0(1+\cos\varphi)/\sin\varphi} \qquad (v_1 \sim 35 \text{ м}/c)$$



Динамика области перегретой жидкости.

Кинетика нуклеации.





Динамика области перегретой жидкости.

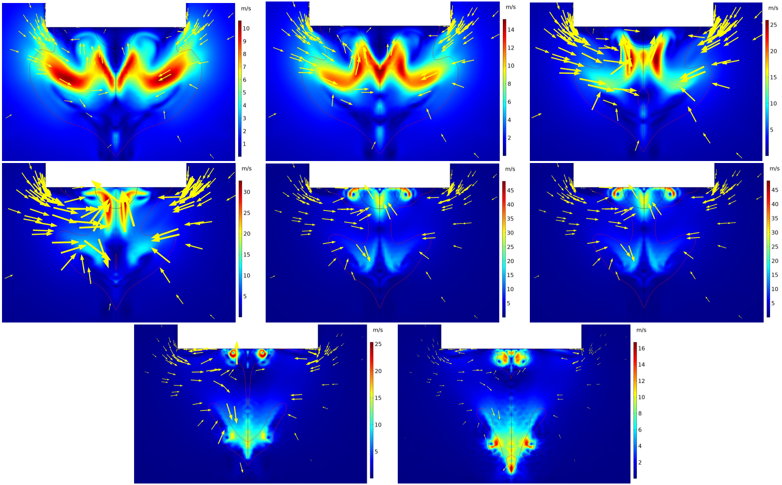
Частота нуклеации:

$$J_{\text{hom}} = N_{\text{hom}} B_{\text{hom}} \exp\left(-\frac{W^*_{\text{hom}}}{k_B T}\right); \quad W^*_{\text{hom}} = \frac{16\pi\sigma^3}{3}\left[(p_\infty - p_l)(1 - v_l/v_v)\right]^{-2}.$$

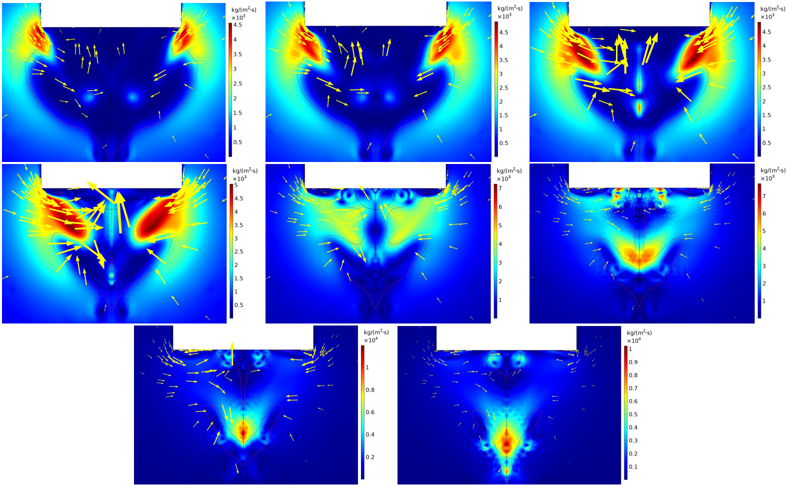
Условие образования зародыша:

$$\int_0^{t_0}\int_{V(t)} J_{\text{hom}}\, dV\, dt \approx 1 \quad \Rightarrow \quad t_0 \text{ — характерное время ожидания + температурное поле.}$$

SST + Level-set модели. Поле скоростей.



Механизм образования кумулятивной струи. Поле скоростей.



Механизм образования кумулятивной струи. Поле импульсов.

Классификация моделей роста парового пузырька.

- **Динамическая инерционная модель.**
  Давление пара в пузырьке в течении всего процесса поддерживается постоянным и равным давлению насыщения при начальной температуре жидкости. Температура жидкости на границе пузырька не изменяется и равна температуре вдали от него, т. е. пренебрегается охлаждением жидкости вблизи межфазной границы, обусловленным испарением.
- **Динамическая вязкая модель.**
  Скорость роста пузырька лимитируется вязкими силами. Исходное уравнение для этого предельного случая получается из уравнения Рэлея (в пренебрежении инерционными членами).
- **Энергетическая молекулярно-кинетическая модель.**
  Предпринимается попытка учесть кинетику фазового превращения. Скорость роста пузырька в данном случае определяется скоростью испарения жидкости с перегретой межфазной границы. Пар в пузырьке в процессе его роста при этом находится в ненасыщенном состоянии.
- **Энергетическая тепловая модель.**
  Рост пузырька обусловлен подводом тепла к межфазной границе от внешних перегретых слоев жидкости. При этом все подведенное тепло расходуется на испарение. Давление пара в пузырьке в течение всего времени поддерживается постоянным и равным давлению окружающей жидкости. Пар в пузырьке находится в насыщенном состоянии.

Уравнение неразрывности: $v_l(r) = v_{lR}(R/r)^2$;

Уравнение импульсов: $\dfrac{\partial v_l}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{p_l}{\rho_l} + \dfrac{v_l^2}{2}\right) = 0.$

Модифицированное уравнение Рэлея:

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_{lR}R^2) - \frac{v_{lR}^2}{2} = \frac{p_{lR} - p_l^i}{\rho_l}.$$

Граничные условия:

$$\frac{1}{4\pi R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho_v\right) = j; \quad v_{lR} = \dot{R} - j/\rho_l;$$

$$p_{lR} = p_v + jv_{lR} - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta_l\frac{v_{lR}}{R};$$

$$j\mathcal{L} = \lambda_l(\partial T_l/\partial r)_{r=R}.$$

Тепловая задача.

Уравнение теплопроводности для жидкой фазы:

$$\frac{\partial(\rho_l c_l T_l)}{\partial t} + v_l \frac{\partial(\rho_l c_l T_l)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_l r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r}\right).$$

Начальное и граничные условия:

$$(T_l)_{t=0} = T^i > T^s(p_l^i);$$

$$(T_l)_{r=R} = T^s(p_v); \quad (T_l)_{r\to\infty} = T^i.$$

\+ уравнение состояния:

$$\rho_v = \rho_v(p_v, T_v).$$

\+ уравнение локального термодинамического равновесия:

$$p_v = p^s(T_v) \quad \text{или} \quad T_v = T^s(p_v).$$

Обезразмеривание.

Величина:	*Безразмерная величина:*	*Характерное значение:*
Температура, T	$\Theta = (T - T^i)/\Delta T^i$	$\Delta T^i = T^i - T^s(p^i)$
Давление, p	$\Pi = (p - p^i)/\Delta p^i$	$\Delta p^i = p^s(T^i) - p^i$
Время, t	$\tau = t/t_0;$	$t_0^{\mathrm{dyn}} = R_0\sqrt{\rho_l/\Delta p_l^i};\ t_0^{\mathrm{th}} = R_0^2/a_l$
Скорость, v	$\bar{v} = v/v_0;$	$v_0 = \sqrt{\Delta p_l^i/\rho_l}$
Размер, r; R	$\bar{r} = r/R_0;\ \bar{R} = R/R_0$	R_0

Выбор характерного размера:

$$t_0^{\mathrm{dyn}} = t_0^{\mathrm{th}} \equiv t_0 \quad \Rightarrow \quad R_0 = a_l\sqrt{\rho_l/\Delta p_l^i}.$$

Безразмерные критерии:

$$\mathbf{Ku} = \frac{\mathcal{L}}{c_l \Delta T^i}; \quad \mathbf{Ja} = \frac{\rho_l}{\rho_v^f}\frac{c_l \Delta T^i}{\mathcal{L}};$$

$$\mathbf{Eu} = \frac{\Delta p_l^i}{\rho_l v_0^2} = 1; \quad \mathbf{We} = \frac{\sigma}{\rho_l v_0^2 R_0}; \quad \mathbf{Re} = \frac{\rho_l R_0 v_0}{\mu_l}.$$

Решение тепловой задачи.

Краевая задача в переменных τ; $\chi = r/R$:

- Уравнение теплопроводности:

$$\bar{R}^2 \frac{\partial \Theta_l}{\partial \tau} = \left(-\frac{\alpha}{\chi^2} + \frac{2}{\chi} + \beta \chi \right) \frac{\partial \Theta_l}{\partial \chi} + \frac{\partial^2 \Theta_l}{\partial \chi^2}, \quad \acute{\bar{R}} = \mathrm{d}\bar{R}/\mathrm{d}\tau, \quad k = 1 - \bar{\rho}_v,$$

где $\alpha = \bar{v}_{lR} \bar{R}$ и $\beta = \acute{\bar{R}} \bar{R}$.

- Начальное и граничные условия:

$$(\Theta_l)_{\tau=0} = 0; \quad (\Theta_l)_{\chi=1} = \Theta^s(\bar{\rho}_v); \quad (\Theta_l)_{\chi \to \infty} = 0.$$

Решение тепловой задачи:

$$\Theta_l(\tau, \chi) = \Theta^s(\bar{\rho}_v) \frac{\mathbf{I}(\chi, \alpha, \beta)}{\mathbf{I}(1, \alpha, \beta)}, \quad \mathbf{I}(\chi, \alpha, \beta) = \int_0^{1/\chi} \exp\left\{ -\alpha\zeta - \beta\zeta^{-2}/2 \right\} d\zeta.$$

Полуаналитическое решение задачи.

Полное решение:

$$\acute{\alpha} = \Pi^s(\bar{\rho}_v) - \frac{2}{\mathbf{We}}\frac{1}{\bar{R}} - \frac{4}{\mathbf{Re}}\frac{\alpha}{\bar{R}^2} - \frac{\alpha^2}{2\bar{R}^2};$$

$$\acute{\bar{\rho}}_v = 3\{(1-\bar{\rho}_v)\,\beta - \alpha\}/\bar{R}^2;$$

$$\acute{\bar{R}} = \beta/\bar{R},$$

где функция $\beta = \beta(\alpha, \bar{\rho}_v)$ неявно задана уравнением:

$$(\beta-\alpha)\mathbf{I}^*(\alpha,\beta) = -\mathbf{Ku}^{-1}\,\Theta^s(\bar{\rho}_v), \quad \mathbf{I}^*(\alpha,\beta) = \int_0^1 \exp\left\{\alpha(1-\zeta) + \beta\big(1-\zeta^{-2}\big)/2\right\} d\zeta.$$

$+$ зависимости $\Pi^s(\bar{\rho}_v)$ и $\Theta^s(\bar{\rho}_v)$.

Приближения:

- при $\alpha, \beta \ll 1$: $\mathbf{I}^*(\alpha,\beta) \approx 1$;
- при $\alpha, \beta \gtrsim 1$:
  $$\mathbf{I}^*(\alpha,\beta) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\beta+4\alpha-4}}\exp\left\{\left(\frac{\beta-\alpha+2}{\sqrt{2\beta+4\alpha-4}}\right)^2\right\}\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta-\alpha+2}{\sqrt{2\beta+4\alpha-4}}\right).$$

Идеальный газ:

$$\rho_v = p_v/(R_g T_v) \quad \text{или} \quad \bar{\rho}_v = \bar{\rho}_v^i \, \frac{1 + \varkappa_2 \Pi_v}{1 + \varkappa_1 \Theta_v},$$

где $\varkappa_1 = \Delta T^i / T^i$; $\varkappa_2 = \Delta p^i / p^i$; $\rho_v^i = p^i / \big(\mathcal{R} T^i\big)$; $R_g = \mathcal{R}/M$.

Уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$\frac{\mathrm{d}p^s}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathcal{L}}{T\Big(\rho_v^{-1} - \rho_l^{-1}\Big)} \quad \Rightarrow \quad p^s = p^i \exp\left\{\frac{\mathcal{L}}{R_g}\left(\frac{1}{T^s(p^i)} - \frac{1}{T}\right)\right\}.$$

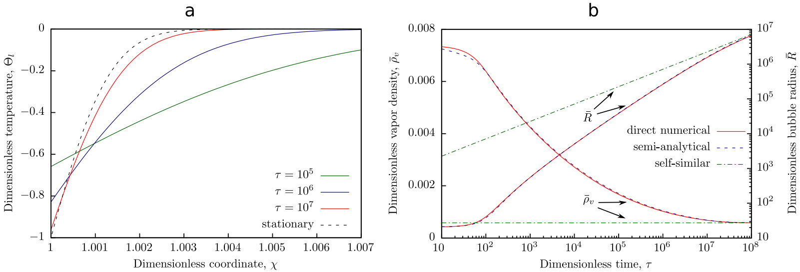
Или

$$1 + \varkappa_2 \Pi^s = \exp\Big\{\varepsilon\Big((1 - \varkappa_1)^{-1} - (1 + \varkappa_1 \Theta_v)^{-1}\Big)\Big\};$$

$$1 + \varkappa_1 \Theta^s = \Big\{(1 - \varkappa_1)^{-1} - \varepsilon^{-1} \ln\left(1 + \varkappa_2 \Pi_v\right)\Big\}^{-1},$$

где $\varepsilon = \mathcal{L}/\big(R_g T^i\big)$.

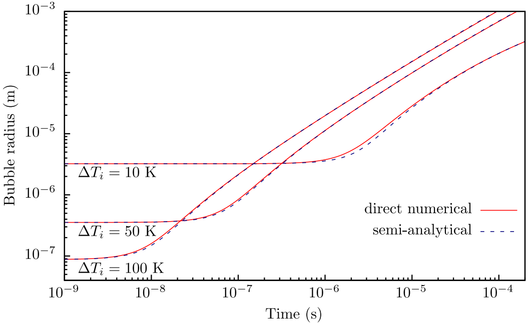
Расчет.



(a) Зависимость температуры жидкости Θ_l от радиальной координаты χ в различные моменты времени τ.

(b) Зависимость радиуса пузырька $\bar{R}$ и плотности пара в пузырьке $\bar{\rho}_v$ от времени τ.

Расчет.



Зависимость радиуса пузырька R от времени t для воды для различных начальных перегревов: сплошная линия — прямое численное моделирование; штриховая линия — найденное полуаналитическое решение.

На больших временах ($\tau \gg 1$): $\bar{p}_v \to 0$; $\Theta_R \to 0$; $\bar{\rho}_v \to \bar{\rho}_v^f$ (асимптотическая тепловая стадия роста).

Решение для температурного поля (в случае мгновенного перегрева):

$$\Theta_l(\chi) = -\frac{\mathbf{I}(\chi, \kappa\beta^f, \beta^f)}{\mathbf{I}(1, \kappa\beta^f, \beta^f)}; \qquad \bar{R} = \sqrt{2\beta^f\tau}.$$

Уравнение на β^f:

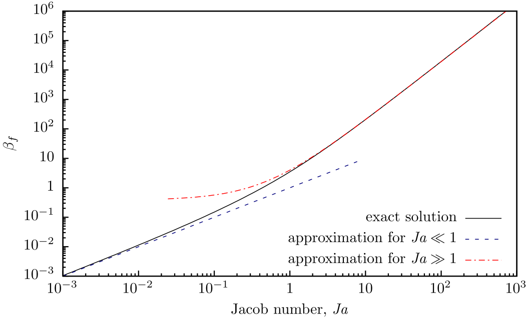
$$\beta^f\, \mathbf{I}^*(\kappa\beta^f, \beta^f) = \mathbf{Ja}.$$

Приближения:

— при $\mathbf{Ja} \ll 1$: $\quad \Theta_l(\chi) \approx 1 - 1/\chi; \quad \beta^f \approx \mathbf{Ja}.$

— при $\mathbf{Ja} \gg 1$: $\quad \Theta_l(\chi) \approx \operatorname{erf}\left\{\left(\sqrt{3\beta^f}/2\right)(\chi - 1)\right\}; \quad \beta^f \approx (6/\pi)(\mathbf{Ja} + 4/9)^2.$

Совпадают с классическими решениями!



Зависимость коэффициента β_f от **Ja**.

Выводы

- Показано, что в результате быстрого нагрева жидкости вблизи торца образуется паровой пузырек, который в процессе своей эволюции претерпевает следующие стадии: стадию быстрого роста, за счет накопленного до его появления тепла, и последующего схлопывания, сопровождающегося образованием жидкой перемычки, которая, при замыкании, приводит к генерации горячей двухфазной струи, распространяющейся от торца оптоволокна вглубь жидкости. Рассчитаны значения достигаемых перегревов и характерного времени ожидания образования парового зародыша. Представлены оценки скорости формирующейся струи.
- Сформулирована математическая модель роста парового пузырька в изначально однородно перегретой жидкости, одновременно учитывающая как динамические, так и тепловые эффекты и включающая в себя известные классические уравнения — уравнение Рэлея и уравнение энергии, записываемые применительно к рассматриваемой задаче с учетом специфики, связанной с процессом испарения жидкости.
- Показано, что представленная задача сводится к решению системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Показано, что полученное решение хорошо согласуется с прямыми численными расчетами в широком диапазоне перегревов и на всех стадиях процесса, включая переходную, учет которой необходим, особенно если рассматривать рост пузырька в сильно перегретой жидкости.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!